Демонстрационный вариант оценочного средства
по дисциплине «Вычислительная математика»

Инструкция для студентов

Тест включает 20 заданий и состоит из частей 1 и 2.

*На выполнение теста отводится **120 минут**.*

Задания рекомендуется выполнять по порядку, не пропуская ни одного, даже самого лёгкого. Когда задание не удаётся выполнить сразу, перейдите к следующему. Останется время, вернитесь к пропущенным заданиям.

Часть 1

Ответом на задания части 1 может быть число, сочетание цифр или функция. После выполнения заданий части 1 запишите получившиеся ответы в бланк ответов.

1. Для заданной таблицы значений определить максимальный порядок j для конечной разности Δ^j x(t=1)

t_i	**-1**	**3**	**-1**	**0**	**2**
x_i	**2**	**2**	**0**	**-1**	**4**

Ответ ________________

2. Для заданной таблицы значений определить максимальный порядок j для разделенной разности Δ^j x (t=1)

t_i	**-1**	**3**	**-1**	**0**	**2**
x_i	**2**	**2**	**0**	**-1**	**4**

Ответ ________________

3. Для заданной таблицы значений определить степень алгебраического интерполяционного полинома

t_i	**-1**	**3**	**-1**	**0**	**2**
x_i	**2**	**2**	**0**	**-1**	**4**

Ответ ________________

4. Определить геометрическую кратность собственных чисел матрицы А.

$$A=\begin{pmatrix}-11 & 8 & -7\\ 9 & -16 & 10\\ 15 & -19 & 12\end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение матрицы

$$(\lambda + 5)^3 = 0.$$

Ответ _______________

5. 33. Устойчива (указать критерий) или неустойчива система дифференциальных уравнений $x_{k+1} = Sx_k$; $S=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & \frac{1}{2} & 3\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

Ответ _______________

Часть 2

Данная часть содержит задания, ответ на которые надо дать в свободной форме. Для ответа на задания используйте специальный бланк.

Решите задачи и обязательно приведите подробное решение задач. Все утверждения, содержащиеся в решении задач, должны быть обоснованы и логически следовать из условия задачи.

6. По формуле Лагранжа построить интерполяционный полином для табличной зависимости $z_i = f\left(x_i\right)$

x_i	-1	**-2**	**0**	**1**
z_i	2	**0**	**0**	**3**

7. Дана система векторов $x_1=\left(2,1,0,0\right)^T$, $x_2=\left(2,1,1,0\right)^T$, $x_3=\left(1,0,2,1\right)^T$ Построить ортогональную систему y_1, y_2, y_3, используя метод Шмидта.

8. Построить ортогональную систему функций $\psi_i(x), i=\overline{1,3}$ на интервале [0,3] используя функции $\phi_i(x)=x^{i-1}, i=\overline{1,3}$.

9. Рассчитать значение интеграла указанным численным методом.

n – число отрезков

$\int\limits_0^2 x^3dx,\ \ n=4$ метод левых прямоугольников

10. Рассчитать значение интеграла указанным численным методом.

n – число отрезков

$\int\limits_0^2 x^2dx,\ \ n=5$, метод трапеций

11.Найти линейно независимые решения однородной системы Ax=0,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

12. Определить условия совместности системы Ax = b, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \ b = (b_1\ b_2\ b_3)^T.$$

13. Используя метод Гаусса, решить систему линейных алгебраических уравнений Ax = b.

$$A=\begin{pmatrix} -11 & 9 & -7 \\ 9 & -16 & 10 \\ 15 & -19 & 12 \end{pmatrix}, \ b = (10\ 3\ 8)^T.$$

14. Рассчитать собственные числа матрицы A.

Определить алгебраическую и геометрическую кратности каждого собственного числа.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -13 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

15. Найти собственные числа матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

16. Заменить дифференциальное уравнение

$$12y'''(t) + 106y''(t) + 5y'(t) + y(t) = 10$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

$$y \in [0, 200]$$

эквивалентной системой дифференциальных уравнений первого порядка.

17. Написать программу решения задачи Коши для дифференциального уравнения используя функцию ode45 языка MATLAB

$$12y'''(t) + 106y''(t) + 5y'(t) + y(t) = 10$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

$$y \in [0, 200]$$

18. Преобразовать уравнение $x^5 - x + 5x^3 - 0.2 = 0$ к виду, пригодному для решения методом простых итераций.

19. Преобразовать уравнение $x^5 - x + 4x^3 - 0.2 = 0$ к виду, пригодному для решения методом простых итераций.

20. Написать алгоритм решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона.

$$x^2y^2 - 3x^3 - 6y^3 + 7 = 0$$

$$x^4 - 9y + 2 = 0$$

$$\varepsilon < 10^{-4}$$

Эталон ответа на Демонстрационный вариант оценочного средства по дисциплине «Вычислительная математика»

1. Ответ j = 4. i=0.

2. Ответ j = 4, i=0.

3. Ответ n= 4

4. Ответ γ=1

5. Ответ: устойчива по Ляпунову (|Re λ| $\le$1 для единственного собственного числа. Модули всех остальных собственных чисел <1).

6. Решение.

В соответствии с формулой Лагранжа $L_3(x) = \sum_{k=0}^{3} z_k \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} =$

$$\frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{1*(-2)*(-3)}2 + \frac{(x+2)(x+1)(x-0)}{3*2*1}.$$

7. Решение.

Пусть задана система базисных элементов φ_i i = 0, 1, …, m. Нужно построить систему соответствующих ортогональных базисных элементов ψ_i . Последовательно рассчитывают:

$\psi_0 = \varphi_0$; $\psi_1 = \varphi_1 + a_{10}\psi_0$;

$\psi_2 = \varphi_2 + a_{20}\psi_0 + a_{21}\psi_1$;

$\psi_j = \varphi_j + a_{j0}\psi_0 + a_{j1}\psi_1 + ... + a_{jj-1}\psi_{j-1}$;

$\psi_m = \varphi_m + a_{m0}\psi_0 + a_{m1}\psi_1 + \dots + a_{mm-1}\psi_{m-1}$.

Коэффициенты a_{ji} i < j, i = 0,…,m отыскиваются из условия ортогональности (ψ_i,ψ_j) = 0. Можно показать, что $a_{ji} = -(\psi_i,\varphi_j)/ (\psi_i,\psi_i)$.

В нашем случае $y_1 = x_1 = \left(2,1,0,0\right)^T$; $a_{21}=-(y_1,x_2)/ (y_1,y_1)=-7/5$; $y_2=x_2+ a_{21}y_1=(1/5,-2/5,1,0)^T$.

8. Решение.

Пусть задана система базисных элементов φ_i i = 0, 1, …, m. Нужно построить систему соответствующих ортогональных базисных элементов ψ_i . Последовательно рассчитывают:

$\psi_0 = \varphi_0$; $\psi_1 = \varphi_1 + a_{10}\psi_0$;

$\psi_2 = \varphi_2 + a_{20}\psi_0 + a_{21}\psi_1$;

$\psi_j = \varphi_j + a_{j0}\psi_0 + a_{j1}\psi_1 + ... + a_{jj-1}\psi_{j-1}$;

$\psi_m = \varphi_m + a_{m0}\psi_0 + a_{m1}\psi_1 + \dots + a_{mm-1}\psi_{m-1}$.

Коэффициенты a_{ji} i < j, i = 0,…,m отыскиваются из условия ортогональности (ψ_i,ψ_j) = 0. Можно показать, что $a_{ji} = -(\psi_i,\varphi_j)/ (\psi_i,\psi_i)$.

В нашем случае $\psi_1=\varphi_1=1$; $a_{21}=-(\psi_1,\varphi_2)/(\psi_1,\psi_1)=-\dfrac{\int_0^3 x\,dx}{\int_0^3 dx}=-\dfrac{3}{2}$; $\psi_2=\varphi_2+a_{21}\psi_1=x-\dfrac{3}{2}$.

9. Решение.

$I_{сост.л.п.}\approx h(f_0+f_1+\ldots+f_{n-1})=h\sum_{i=0}^{n-1} f_i$ = 0.5(0+1/4+1+9/4) = 7/4.

10. **Решение.**

$I_{сост.тр.}\approx h\left(\frac{f_0}{2}+f_1+\ldots+f_{n-1}+\frac{f_n}{2}\right)=h\left(\sum_{i=1}^{n-1} f_i+\frac{f_0+f_n}{2}\right)$ **=0.5(0+1/4+1+9/4+2)=11/2.**

11.**Решение.**

Осуществляем процедуру Гауссова исключения $A\longrightarrow A_1\longrightarrow A_2\longrightarrow U$.

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 2 & -7 & 4\\ 0 & 2 & -7 & 5\\ 0 & 4 & -14 & 8\end{pmatrix}\quad A_2=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 2 & -7 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Обработка третьего столбца не потребовалась, $A_2 = U$.

r(A) =r(U)=3, n –r = 1. Существует одно ненулевое линейно независимое решение. Третий столбец матрицы U оказался без ведущего элемента. Переменная $x_3=c$ свободная переменная. Остальные переменные находятся обратной подстановкой. Из третьего уравнения следует $x_4 = 0$, из второго $2x_2 -7c + 4x_4 = 0$, т. е. $x_2 = (7/2)c$. Из первого уравнения имеем $x_1 – x_2+ 5x_3 – x_4 = 0$, т. е. $x_1= -(3/2)c$, $x_1 – x_2+ 5x_3 – x_4 = 0$, т. е. $x_1= -(3/2)c$.

$$x=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}c\\ \frac{7}{2}c\\ c\\ 0\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{7}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

12. Решение.

Используя метод исключения Гаусса, получаем

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & 6 & 5 & b_2 \\ 1 & 2 & 2 & b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & 6 & 5 & b_2 \\ 0 & 6 & 5 & 2b_3 - b_1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & 6 & 5 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2b_3 - b_1 - b_2 \end{pmatrix}$$

В данном случае r(A)=2. Для существования частного решения необходимо выполнение условия $2b_3$-b_1-b_2=0. Неизвестную

x_3 полагают равной произвольной константе, x_2 и x_1 определяются в ходе обратной подстановки.

13. Решение.

Используя метод исключения Гаусса, получаем

$$\begin{pmatrix} -18 & 8 & -4 & 10 \\ 9 & -16 & 10 & 3 \\ 18 & -20 & 10 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -18 & 8 & -4 & 10 \\ 0 & -12 & 8 & 8 \\ 0 & -12 & 6 & 18 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} -18 & 8 & -4 & 10 \\ 0 & -12 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Решение задачи $x = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

14. Решение.

Вычисляем собственные числа матрицы A, воспользовавшись типовой программой (например eig(A) в MATLAB): λ= $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Алгебраическая кратность α(λ)=3.

Чтобы определить геометрическую кратность собственного числа, надо решить однородную линейную систему с матрицей

A+E=$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. Во втором столбце ведущий элемент отсутствует, x_2=c, где c произвольное число. Таким образом, для λ= -1 существует единственный собственный вектор x=$c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Геометрическая кратность собственного числа $\gamma(\lambda)=1$.

15. Решение.

Для вычисления собственных чисел следует использовать типовую программу (например, eig(A) в MATLAB): $\lambda=\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

16. Решение.

Если дифференциальные уравнения линейны, то форма Коши приобретает вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Здесь $x \in R^n$ - вектор состояния, $u \in R^r$ - вектор воздействий, $y \in R^m$ - вектор выходных переменных. Матрицы $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times r}, C \in R^{m\times n}, D \in R^{m\times r}$.

Пусть задано линейное дифференциальное уравнение третьего порядка:

$a_0y''' + a_1y'' + a_2y' + a_3y = u = 10$; $y''(t_0)=y'(t_0)=y(t_0)=0$. Осуществляем замену переменных: $y=x_1$, $y'=x_1'=x_2$, $y''=x_2'=x_3$, $y'''=x_3'=\frac{1}{a_0}(-a_3x_1 - a_2x_2 - a_1x_3) + \frac{u}{a_0}$.

Таким образом, $x=(x_1\ x_2\ x_3)^T$, u=10, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_3}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix}$, $B=(0\ \ 0\ \ 10/a_0)^T$. Выходной величиной следует считать искомую функцию $y(t)=x_1(t)$. Следовательно, C=(1 0 0), D=0.

$a_0=12$; $a_1=106$; $a_2=5$; $a_3=1$.

17. Решение.

```
function ode5
   y0=[0; 0; 0];
   options=odeset('RelTol',1e-13,'AbsTol',[1e-12 1e-5 1e-8]);tic;
   [T,Y]=ode45(@oscil,[0 200],y0,options);toc;
   plot(T,Y(:,1));grid;title('Решение');

  function f=oscil(t,y)
   f=[y(2);y(3);1/12*(10-y(1)-106*y(3)-5*y(2))];
```

18. Решение.

Один из возможных вариантов $x=x^3+x^5-0.2$.

19. Преобразовать уравнение $x^5 - x + 4x^3 - 0.2 = 0$ к виду, пригодному для решения методом простых итераций.

Решение.

Один из возможных вариантов $x=x^5+4x^3-0.2$

20. Решение.

Векторная форма задачи F(x) = 0, где

$$x_1 = x;\ x_2 = y;\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\ \mathrm{F(x)}=\begin{pmatrix} x_1^2 x_2^2 - 3x_1^3 - 6x_2^3 + 8 \\ x_1^4 - 9x_2 + 2 \end{pmatrix}.$$ Матрица Якоби

$$F_x(x) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2^2 - 9x_1^2 & 2x_2x_1^2 - 18x_2^2 \\ 4x_1^3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм метода выглядит следующим образом.

1.Задаемся начальным приближением x_0.

2. Вычисляем $F(x_0)$ и $F_x(x_0)$.

3.Решаем систему линейных алгебраических уравнений $F(x_0)+F_x(x_0)\Delta x=0$.

4.Находим уточненное приближение $x= x_0+\Delta x$

5. Проверяем критерий окончания вычислений $|x-x_0|\le\varepsilon_{зад}$.

6. Если критерий выполнен, x найденное решение. Иначе $x_0=x$ и переход к п.2.

Варьируя начальное приближение, получаем набор вариантов решения задачи.