Разработано по заказу Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки.
Утверждено ФУМО по УГСН 01.00.00 «Математика и механика».

Демонстрационный вариант по дисциплине «Топология»

Инструкция для студентов

Общее время выполнения заданий ***60*** *минут.*

Оценочное средство включает ***3*** *задания. Тип заданий – со свободно конструируемым ответом (СКО). Задание данного типа предполагает составление развернутых ответов, произвольных по содержанию и форме представления и включающих полное решение задачи (описание проблемы) с пояснениями.*

1. Теорема о существовании различных мощностей;
2. Существенные и не существенные отображения, их свойства;
3. Задача: Доказать, что непрерывный образ компакта – компакт;

Разработано по заказу Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки.
Утверждено ФУМО по УГСН 01.00.00 «Математика и механика».

Эталон ответов на Демонстрационный вариант оценочного средства по дисциплине «Топология»

Задание 1. Теорема о существовании различных мощностей:

Теорема о существовании различных мощностей: *Пусть X и Y - два произвольных непустых множества, удовлетворяющих тому единственному условию, чтобы Y состояло более чем из одного элемента. Множество всех различных отображений множества X в множестве Y имеет мощность большую, чем мощность множества X.*

При этом мы естественно считаем два отображения f_1 и f_2 множества X в множестве Y различными, если по крайней мере для одного элемента $x \in X$ элементы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ множества Y различны между собою.

Доказательство теоремы. Обозначим через Y^X множество всех отображений множества X в множестве Y . В соответствии с определением неравенства мощностей мы должны доказать два утверждения:

1. Существует взаимно однозначное отображение множества X на некоторое подмножество Y^X.

2. Не существует взаимно однозначного отображения множества X на все множество Y^X.

Для доказательства первого утверждения выберем в множестве Y два каких-нибудь различных элемента y' и y'', и для каждого элемента x_o множества X построим отображение f_{x_0} множества X в множество Y следующим способом: образ данного элемента x_o при отображении f_{x_0} есть $f_{x_0}(x_o)$=y', а образ всякого отличного от x_o элемента $x \in X$ при отображении f_{x_0} есть $f_{x_0}(x)$ = y'' .

Различным элементам x_1, x_2 множества X соответствуют различные отображения; в самом деле,

$f_{x_1}(x_1)$= y',

$f_{x_2}(x_1)$= y''.

Итак, нами установлено взаимно однозначное соответствие между множеством X и частью множества $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{X}}$.

Докажем теперь, что не существует никакого взаимно однозначного соответствия между множеством X и множеством $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{X}}$.

Предположим, что такое соответствие существует, и обозначим через

$\boldsymbol{f}^{\xi}$ элемент множества $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{X}}$, который в силу этого соответствия отвечает элементу ξ множества X . Искомое противоречие мы получим, если найдем элемент f множества $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{X}}$, отличающийся от всех $\boldsymbol{f}^{\xi}$.

Такой элемент f, т.е. такое отображение множества X в множество Y, мы построим следующим образом. Рассмотрим произвольный элемент множества X; образ этого элемента при отображении $\boldsymbol{f}^{\xi}$ есть элемент $\boldsymbol{f}^{\xi}(\xi)$ множества Y. Определим теперь f(ξ), положив f(ξ) = $\boldsymbol{\eta}$, где $\boldsymbol{\eta}$ - произвольный элемент множества Y, выбранный под единственным условием, чтобы он был отличен от элемента $\boldsymbol{f}^{\xi}(\xi)$ (это условие всегда выполнимо, так как, по предположению, множество Y содержит по крайней мере два элемента).

Мы утверждаем, что отображение f отлично от всех отображений $\boldsymbol{f}^{\xi}$. В самом деле, если бы f совпадало с некоторым определением $\boldsymbol{f}^{\xi}$, то, в частности, для элемента $\xi \in$X мы имели бы

f(ξ) = $\boldsymbol{f}^{\xi}(\xi)$,

вопреки определению отображения f. Теорема этим доказана.

Замечание. Только что изложенная теорема, принадлежащая к числу замечательнейших предложений теории множеств, доказана, и притом приведенным здесь методом, основателем теории множеств Кантором. Самый этот метод доказательства известен под названием канторова диагонального процесса.

Рассмотрим различные частные случаи теоремы Кантора.

Прежде всего, пусть множество Y состоит из двух элементов, положим из элементов 0 и 1. Тогда каждому отображению f множества X в множество Y соответствует разбиение множества X на два подмножества без общих элементов: на подмножество $\boldsymbol{X}_0^{\boldsymbol{f}}$, состоящее из всех тех элементов $x \in X$, для которых f (x)=0, и на подмножество X_1^f, состоящее из остальных элементов множества X, т. е. из тех $x \in X$, для которых f (x)=1. Сосредоточив свое внимание на подмножествах X_0^f, мы можем сказать: каждому отображению f множества X в множество Y, состоящее из двух элементов 0 и 1, соответствует определенное подмножество X_o множества X (а именно подмножество X_0^f). При этом каждое подмножество X_o множества X поставлено в соответствие вполне определенному отображению множества X в множество Y (состоящее из двух элементов 0 и 1), именно отображению f, определяемому условием f (x)= 0, если $x \in X_o$, f (x) = 1, если $x \in X \setminus X_o$.

Итак, установлено взаимно однозначное соответствие между множеством всех подмножеств множества X и множеством всех отображений множества X в множество, состоящее из двух элементов 0 и 1. Так как это множество отображений имеет мощность большую, чем множество X, то доказана

Теорема. *Множество всех подмножеств произвольного непустого множества X имеет мощность большую, чем мощность множества X.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мощность $2^{\aleph_0}$ называется мощностью континуума и обозначается через $\mathfrak{C}$; она несчетна : $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

Задание 2. Существенные и не существенные отображения, их свойства:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: *(П.С.Александров). Непрерывное отображение*

$f: X \to \overline{T}^n$ называется существенным, если всякое непрерывное отображение f_1 : $X \to \overline{T}^n$, совпадающее с f во всех точках множества $\Phi = f^{-1} S^{n-1}$, есть отображение на все $\overline{T}^n$.

Согласно этому определению всякое существенное отображение $f: X \to \overline{T}^n$ есть отображение на $\overline{T}^n$.

Очевидно, *определение* означает, что непрерывное отображение

$f: X \to \overline{T}^n$ несущественно тогда и только тогда, когда имеется такое отображение f_1 пространства X на некоторое собственное подмножество $Y \subset \overline{T}^n$,что

(1) $f_1(x) = f(x)$ для всех $x \in \Phi = f^{-1} S^{n-1}$.

Ясно, что *для того, чтобы непрерывное отображение* $f: X \to \overline{T}^n$ *было несущественно, необходимо (и, очевидно, достаточно), чтобы существовало удовлетворяющее условию (1) непрерывное отображение* $f_1: X \to S^{n-1}$.

Определение (Брауэр). *Два непрерывных отображения* f_o *и* f_1 *пространства X в пространство Y называются гомотопными между собой, если существует такое непрерывное отображение* $f: X \times \boldsymbol{I} \to Y$, $\boldsymbol{I}=[a,b]$, *что*

$f(x,a) = f_o x$, $f(x,b) = f_1 x$ *для всех* $x \in X$.

Очевидно, что отрезок I=[a,b] можно заменить любым другим отрезком I=[a',b'], в частности отрезком I=[0,1].

Гомотопия между отображениями $f_o: X \to Y$ и $f_1: X \to Y$ называется связанной данным множеством $\Phi \subset X$, если требуется выполнение дополнительного условия $f(x,t) = f(x,a) = f(x,b)$ для всех $x \in \Phi$, $t \in [a,b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пространства* $\boldsymbol{X}_1$ *и* $\boldsymbol{X}_2$ *называются гомотопически эквивалентными, если существуют отображения* $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X}_1 \to \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{g}: \boldsymbol{X}_2 \to \boldsymbol{X}_1$ *такие, что отображения* $\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X}_1 \to \boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{fg}: \boldsymbol{X}_2 \to \boldsymbol{X}_2$ *гомотопны тождественным.*

Класс гомотопически эквивалентных пространств называется гомотопическим типом.

Определение. *Непрерывное отображение f пространства* X *в сферу* $\boldsymbol{S}^n$ *называется несущественным, если оно гомотопно нуль - отображению.*

В противном случае отображение f называется существенным.

Заметим, если при отображении $f_o: X \to \boldsymbol{S}^n$ хотя бы одна точка $\boldsymbol{y}_0 \in \boldsymbol{S}^n$ "остается непокрытой" (т.е. $\boldsymbol{y}_0 \in \boldsymbol{S}^n \setminus f_o X$), то отображение f_o несущественно.

Предложение. *Если при отображении f:* $X \to \boldsymbol{S}^n$ *подпространство* $A \subset X$ *существенно отображается на сферу* $\boldsymbol{S}^n$, *то отображение f:* $X \to \boldsymbol{S}^n$ *существенно.*

Доказательство. Предположим, что отображение f: $X \to \boldsymbol{S^n}$ несущественно. Следовательно, существует гомотопия $\varphi : X \times I \to S^n$, связывающая отображение f с нуль-отображением. Тогда гомотопия $\boldsymbol{\varphi|_{AxI} : AxI \to S^n}$связывает отображение $\boldsymbol{f|_A}$ с нуль-отображением, что противоречит существенности отображения f: $X \to \boldsymbol{S^n}$. Предположение 5.1 доказано.

Утверждение. *Шар* $\bar{U}^n$ *нельзя существенно отобразить на сферу* $\boldsymbol{S^{n-1}}$.

Доказательство. Пусть f: $\bar{U}^n \to S^{n-1}$ какое-нибудь непрерывное отображение. Покажем, что оно гомотопно постоянному отображению. Считаем, что радиус $\bar{U}^n$ равен 1, а центр лежит в начале координат. Точки шара $\bar{U}^n$ отождествляем с их радиус-векторами. Тогда для любой точки $x \in \bar{U}^n$ и любого числа t, $0 \le t \le 1$, однозначно определена точка tx $\in \bar{U}^n$ (точка tx делит отрезок [0, x] в отношении t). Рассмотрим теперь отображение $\varphi : \bar{U}^n \times I \to S^n$, задаваемое равенством

φ(x,t) = f(tx). Отображение φ , очевидно, непрерывно. На верхнем основании цилиндра $\bar{U}^n \times I$ отображение φ совпадает с f, а нижнее основание цилиндра $\bar{U}^n \times I$ отображения φ переводит в точку $f(0) \in \boldsymbol{S^{n-1}}$. Таким образом, отображение $\varphi : \bar{U}^n \times I \to S^{n-1}$ осуществляет гомотопию между отображением f и некоторым постоянным отображением, **ч. и т.д.**

Задание 3. Доказать, что непрерывный образ компакта – компакт:

Непрерывный образ компакта - компакт.

Доказательство: Пусть f : K→Y непрерывное отображение компакта K на пространство Y. Покажем, что Y - компакт, т.е. из любого открытого покрытия можно выбрать конечное. Пусть $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$ - открытое покрытие Y , тогда $\omega' = \{ f^{-1}O_\alpha : \alpha \in A\}$ - открытое покрытие K . Так как K - компакт, выберем из ω' конечное покрытие $\omega'' = \{ f^{-1}O_{\alpha_i} : i = 1,\dots,n \}$ компакта K . Но тогда $\omega_1 = \left\{O_{\alpha_i}\right\}_{i=1}^{n}$ - конечное покрытие Y , т.е. Y - компакт. Все доказано.