Разработано по заказу Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки.
Утверждено ФУМО по УГСН 01.00.00 «Математика и механика».

Список зданий по дисциплине «Дифференциальная геометрия»

Теоретические вопросы

1. Векторные функции одной и нескольких переменных: свойства, дифференцирование, разложение в ряд Тейлора.

2. Кривые в евклидовом пространстве: элементарная кривая, простая кривая, общая кривая. Регулярная кривая класса $C^{(K)}$, гладкая кривая.

3. Различные способы задания плоских кривых: параметрическое, графиком функции, неявное.

4. Различные способы задания кривых в пространстве: параметрическое, как пересечение двух поверхностей.

5. Касание кривых. Касательная к кривой. Соприкасающаяся окружность. Угол между кривыми.

6. Касание кривой и поверхности. Соприкасающаяся плоскость. Соприкасающаяся сфера.

7. Кривые на плоскости: касательная, соприкасающаяся окружность. Нормаль к плоской кривой.

8. Кривые в пространстве: касательная, соприкасающаяся окружность. Нормальная, соприкасающаяся и спрямляющая плоскости. Главная нормаль и бинормаль. Соприкасающаяся сфера.

9. Длина кривой. Независимость длины кривой от параметра.

10. Натуральный параметр на кривой (естественная параметризация кривой). Векторы скорости и ускорения кривой, заданной через натуральный параметр.

11. Кривые на плоскости: кривизна и ее свойства. Формулы Френе на плоскости. Натуральные уравнения кривой.

12. Кривые в пространстве: кривизна , кручение и их свойства. Формулы Френе в пространстве. Натуральные уравнения кривой.

13. Понятие о вычислительных формулах для кривизны и кручения кривой.

14. Поверхности в евклидовом пространстве: элементарная поверхность, простая поверхность, общая поверхность. Регулярная поверхность класса $C^{(K)}$, гладкая поверхность.

15. Различные способы задания поверхностей: параметрическое, графиком функции, неявное.

16. Касательная плоскость к поверхности. Соприкасающийся параболоид к поверхности. Классификация точек поверхности.

17. Первая квадратичная форма поверхности в трехмерном евклидовом пространстве (индуцированная метрика на поверхности). Свойства первой квадратичной формы.

18. Использование первой квадратичной формы поверхности для вычисления длины кривой, лежащей на поверхности.

19. Использование первой квадратичной формы поверхности для вычисления угла между кривыми, лежащими на поверхности.

20. Использование первой квадратичной формы поверхности для вычисления площади области, лежащей на поверхности.

21. Понятие о второй и третьей квадратичных формах поверхности в трехмерном евклидовом пространстве.

22. Кривизна кривой, лежащей на поверхности. Нормальная кривизна поверхности в данном направлении.

23. Плоские и нормальные сечения поверхности, нормальные кривизны поверхности. Главные нормальные сечения поверхности, главные (нормальные) кривизны поверхности. Главные направления на поверхности.

24. Средняя и полная (гауссова) кривизны поверхности. Примеры поверхностей положительной, отрицательной и нулевой полной кривизны.

25. Понятие о вычислительных формулах для главных кривизн, средней и полной кривизнах поверхности.

26. Понятие о внутренней и внешней геометрии поверхности. Роль первой и второй квадратичных форм.

27. Нормальная и геодезическая кривизна кривой на поверхности, геодезические линии. Свойства геодезических.

28. Понятие о теореме Гаусса-Бонне и следствии из нее о сумме углов геодезического многоугольника, лежащего на поверхности.

29. Понятие о римановой метрике в пространстве и индуцированной римановой метрике на поверхности.

Практические задачи

1. Кривая на плоскости задана параметрически радиус-вектором

$$\vec{r}\,(t)=\{a\ Cos\ t,\ b\ Sin\ t\},\ a,\ b\ \in Z\ , t\in\left[0;2\pi\right].$$

Задать ее в виде графика функции или неявно. Выяснить расположение кривой на плоскости и нарисовать ее.

2. Кривая на плоскости задана параметрически

1) $x = t,\ y = t^2 - 4t + 4$ при $t \in \Re$

2) $x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4,\ y = t^2$ при $t \in \Re$;

3) $x = t + \frac{1}{t},\ y = t - \frac{1}{t}$ при $t \in \Re \setminus \{0\}$;

4) $x = a\cos\frac{t}{2},\ y = a\sin\frac{t}{2}$ при $t \in [0; 2\pi]$

Задать ее в виде графика функции или неявно. Выяснить расположение кривой на плоскости и нарисовать ее.

3. Кривая в пространстве задана радиус-вектором

$$\vec{r}\,(t)=\{a\ Cos\ t,\ a\ Sin\ t,\ bt\},\ a,\ b\ \in Z\ ,\ a,\ b>0,\ t \ge 0.$$

Выяснить расположение кривой в пространстве и по возможности нарисовать ее.

4. Показать, что кривая $x = Sin2t,\ y = 1 - Cos2t,\ z = 2Cost,\quad 0 \le t \le 2\pi$ лежит на сфере.

5. Кривая на плоскости задана радиус-вектором

$$\vec{r}\,(t)=\{at\ Cos\ t,\ bt\ Sin\ t\},\ a,\ b\ \in Z\ ,t \in [0; 2\pi].$$

Написать уравнения касательной и нормали при $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

6. Кривая на плоскости задана параметрически

1) $x = t,\ y = t^2 - 4t + 4,\quad t_0 = 2$;

2) $x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4,\ y = t^2,\ t_0 = 2$;

3) $x = t + \frac{1}{t},\ y = t - \frac{1}{t}\ ,\quad t_0 = 1$;

4) $x = a\cos t,\ y = a\sin t\ ,\quad t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Написать уравнения касательной и нормали при $t = t_0$.

7. Кривая задана неявно:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Написать уравнения касательной и нормали при $x_0=2,\ y_0=0$.

8. Кривая задана графиком функции $y=ax^2+bx+c$. Написать уравнения касательной и нормали при $x_0=2$.

9. Найти угол между кривыми в точке их пересечения:

1) $y=ax^2$ и $y=\dfrac{k}{x}$,

2) $y=a^x\sin x$ и $y=a^x$.

10. Напишите уравнение касательной прямой и нормальной плоскости кривой γ, заданной параметрически в трехмерном пространстве, при $t=t_0$. Определите класс гладкости кривой.

1) $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ z=e^t,\quad t\in R,\quad t_0=0$,

2) $x=e^t,\ y=e^{-t},\ z=t^2,\quad t\in R,\quad t_0=1$,

3) $x=t^2\cos t,\ y=t^2\sin t,\ z=t^2,\quad t\in R,\quad t_0=0$,

4) $x=a\sin^2 t,\ y=b\sin t\cos t,\ z=c\cos t,\quad t\in R,\quad t_0=0$.

11. Кривая задана как пересечение двух поверхностей:

1) $\begin{cases}x^2+y^2-z^2=1,\\ x^2-y^2-z^2=1,\end{cases}$ $\quad(x_0,\ y_0,\ z_0)$ – точка кривой.

2) $\begin{cases}x^2+y^2=10,\\ x^2+y^2=25,\end{cases}$ $\quad(x_0,\ y_0,\ z_0)=(1,3,4)$.

3) $\begin{cases}x^2+y^2=z^2,\\ x=y,\end{cases}$ $\quad(x_0,\ y_0,\ z_0)$ – точка кривой.

Написать уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

12. Найти векторы канонического репера кривой

$$x=t\sin t,\ y=t\cos t,\ z=te^t$$

в начале координат.

13. Кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = \sin t,\ y = \cos t,\ z = \mathrm{tg}\, t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Написать уравнение касательной прямой, нормальной плоскости, бинормали, главной нормали, соприкасающейся и спрямляющей плоскости в точке $t = \dfrac{\pi}{4}$.

14. Найти точки на кривой $x = \dfrac{2}{t},\ y = \ln t,\ z = -t^2, \quad t \in (0, +\infty)$, в которых бинормаль параллельна плоскости $x - y + 8z + 2 = 0$.

15. Даны параметрические уравнения кривой на плоскости или в пространстве. Найти какую-нибудь кривую, имеющую с данной кривой в данной точке касание 1, 2, 3 порядка. На плоскости рассмотреть кривые

1) $x = aCost, y = bSint$ в точке $t = \dfrac{3\pi}{2}$,

2) $x = t - \dfrac{1}{t}, y = t + \dfrac{1}{t}$ в точке $(0, 2)$,

3) $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0).

16. Найти длину астроиды

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ z = 0, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

17. Найти длину замкнутой кривой

$$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ z = \cos 2t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

18. Даны параметрические уравнения винтовой линии

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt, \quad a \ne 0, b \ne 0, t \in R.$$

Записать кривую через натуральный параметр *s*. Выяснить длину вектора *r'(s)* и направление вектора *r''(s)*.

19. Даны параметрические уравнения кривой

$$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ z = 4\sin\frac{t}{2}, \quad t \in R.$$

1) Записать кривую через натуральный параметр *s*.

2) Найти векторы скорости, главной нормали и бинормали, выраженные через натуральный параметр.

3) Найти кривизну и кручение кривой, используя натуральный параметр.

4) Найти кривизну и кручение кривой, используя вычислительные формулы для их нахождения.

20. Определить расположение и вид координатных линий на поверхности

1) конуса $\vec{r}(\varphi;z)=\{zCos\varphi; zSin\varphi; kz\}$, где $\varphi\in[0;2\pi]$,

2) цилиндра $\vec{r}\ (\varphi, z)=\{R\ Cos\varphi,\ R\ Sin\varphi,\ z\}$,

3) сферы $\vec{r}\ (\theta,\ \varphi)=\{R\ Sin\theta Cos\varphi,\ R\ Sin\theta Sin\varphi,\ R\ Cos\theta\}$,

4) катеноида $\vec{r}\ (u,\ \varphi)=\{R\ Ch\ u\ Cos\varphi,\ R\ Ch\ u\ Sin\varphi,\ R\ u\}$;

5) геликоида $\vec{r}\ (u,\ v)=\{u\ Cos\ v,\ u\ Sin\ v,\ k\ v\}$.

21. Написать уравнения касательной и нормали в данной точке для поверхности

1) конуса $\vec{r}(\varphi;z)=\{zCos\varphi; zSin\varphi; kz\}$, где $\varphi\in[0;2\pi]$, в точке $(z_0;\varphi_0)=\left(5;\dfrac{\pi}{2}\right)$,

2) цилиндра $\vec{r}\ (\varphi, z)=\{R\ Cos\varphi,\ R\ Sin\varphi,\ z\}$, где $\varphi\in[0;2\pi]$, в точке $(z_0;\varphi_0)=\left(2;\dfrac{\pi}{4}\right)$,

3) сферы $\vec{r}\ (\theta,\ \varphi)=\{R\ Sin\theta Cos\varphi,\ R\ Sin\theta Sin\varphi,\ R\ Cos\theta\}$, где $\varphi\in[0;2\pi]$, $\theta\in[0;\pi]$, в точке $(\varphi_0;\theta_0)=\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{4}\right)$,

4) катеноида $\vec{r}\ (u,\ \varphi)=\{R\ Ch\ u\ Cos\varphi,\ R\ Ch\ u\ Sin\varphi,\ R\ u\}$, где $\varphi\in[0;2\pi]$, в точке $(u_0;\varphi_0)=\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$,

5) геликоида $\vec{r}\ (u,\ v)=\{u\ Cos\ v,\ u\ Sin\ v,\ k\ v\}$ в точке $(u_0;v_0)=\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

22. Написать уравнения касательной и нормали в точке $(x_0;y_0;z_0)=(1;2;3)$ для сферы $x^2+y^2+z^2=14$.

23. Написать уравнения касательной и нормали в точке $x_0=\sqrt{2p}$ для параболического цилиндра $y=\dfrac{1}{2p}x^2$.

24. Найти какую-нибудь поверхность, имеющую с конусом $\vec{r}(\varphi; z) = \{zCos\varphi; zSin\varphi; kz\}$, где $\varphi \in [0; 2\pi]$ в точке $(z_0; \varphi_0) = \left(2; \frac{\pi}{4}\right)$ касание 1, 2, 3 порядка.

25. Найти гауссову и среднюю кривизны цилиндра $\vec{r}\ (\varphi, z)=\{R\ Cos\varphi\ , R\ Sin\varphi\ , z\}$ в точке $(z_0; \varphi_0) = \left(2; \frac{\pi}{4}\right)$, используя первую и вторую квадратичные формы поверхности, а также используя главные нормальные кривизны поверхности.