Разработано по заказу Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки.
Утверждено ФУМО по УГСН 01.00.00 «Математика и механика».

Список зданий по дисциплине «Аналитическая геометрия»

Теоретические вопросы

1. Направленные отрезки. Отношение равенства на множестве направленных отрезков. Векторы как классы равных направленных отрезков.
2. Операции над векторами и их свойства.
3. Коллинеарные и компланарные векторы и их свойства. Базис множества векторов плоскости и трехмерного пространства. Координаты векторов и их свойства.
4. Формулы преобразования координат векторов. Геометрический смысл матрицы перехода от базиса к базису.
5. Скалярное произведение векторов в аналитической геометрии и его свойства.
6. Длина (модуль) вектора, угол между двумя векторами в аналитической геометрии, их связь со скалярным произведением..
7. Скалярное произведение, длина (модуль) вектора, угол между двумя векторами в координатах в произвольном и в ортонормированном базисе.
8. Понятие об ориентации прямой, плоскости и трехмерного пространства.
9. Векторное произведение в трехмерном ориентированном пространстве и его свойства. Геометрический смысл векторного произведения.
10. Векторное произведение в координатах в произвольном и в ортонормированном базисе.
11. Смешанное произведение в трехмерном ориентированном пространстве и его свойства. Геометрический смысл смешанного произведения.
12. Смешанное произведение в координатах в произвольном и в ортонормированном базисе.
13. Аффинная система координат и прямоугольная система координат на плоскости и в трехмерном пространстве. Координаты точек и формулы преобразования координат точек, геометрический смысл матрицы перехода.
14. Расстояние между точками в координатах в произвольной аффинной и в прямоугольной системе координат.
15. Прямые на плоскости и способы их задания:

Направляющий вектор прямой. Уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором: параметрические уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором; канонические уравнения прямой.

Уравнения прямой, заданной двумя точками: параметрические уравнения прямой, заданной двумя точками.

Общее уравнение прямой на плоскости.

Уравнение прямой в отрезках.

Прямая как график линейной функции, геометрический смысл углового коэффициента, если прямая задана в прямоугольной системе координат.

Уравнение прямой, заданной точкой и нормальным вектором, записанное в прямоугольной системе координат.

16. Аффинные свойства прямых на плоскости:

полуплоскости, на которые прямая делит плоскость,

взаимное расположение прямых на плоскости, заданных точкой и направляющим вектором,

взаимное расположение прямых, заданных общими уравнениями.

17. Метрические свойства прямых на плоскости (в прямоугольной системе координат):

нормаль к прямой, заданной общим уравнением,

расстояние от точки до прямой, заданной точкой и направляющим вектором (использование векторного произведения),

расстояние от точки до прямой, заданной общим уравнением,

расстояние между двумя прямыми, заданными точками и направляющими векторами,

расстояние между двумя прямыми, заданными общими уравнениями, угол между двумя прямыми (любая формула).

18. Плоскости в пространстве и способы их задания:

Параметрические уравнения плоскости, заданной точкой и парой неколлинеарных векторов.

Уравнения плоскости, заданной тремя точками: параметрические уравнения плоскости, заданной тремя точками.

Общее уравнение плоскости в трехмерном пространстве.

Уравнение плоскости в отрезках.

Плоскость как график линейной функции двух переменных.

Уравнение плоскости, заданной точкой и нормальным вектором, записанное в прямоугольной системе координат.

19. Аффинные свойства плоскостей:

полупространства, на которые плоскость разбивает трехмерное пространство,

взаимное расположение плоскостей, заданных точкой и парой неколлинеарных векторов,

взаимное расположение плоскостей, заданных общими уравнениями.

20. Метрические свойства плоскостей в пространстве (в прямоугольной системе координат):

нормальный вектор плоскости, заданной общим уравнением,

расстояние от точки до плоскости, заданной точкой и парой неколлинеарных векторов (использование смешанного и векторного произведения),

расстояние от точки до плоскости, заданной общим уравнением,

расстояние между двумя плоскостями, заданными точками и парами неколлинеарных векторов,

расстояние между двумя плоскостями, заданными общими уравнениями,

угол между двумя плоскостями.

21. Прямые в трехмерном пространстве и способы их задания:

Направляющий вектор прямой. Уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором: параметрические уравнения прямой, канонические уравнения прямой.

Уравнения прямой, заданной двумя точками: параметрические уравнения прямой, заданной двумя точками,.

Задание прямой в трехмерном пространстве системой двух линейных уравнений от трех переменных.

22. Аффинные свойства прямых в пространстве:

взаимное расположение прямых в пространстве, заданных точками и направляющими векторами.

23. Метрические свойства прямых в пространстве (в прямоугольной системе координат):

расстояние от точки до прямой, заданной точкой и направляющим вектором, в пространстве (использование векторного произведения),

расстояние между скрещивающимися прямыми в пространстве, заданными точками и направляющими векторами (использование смешанного и векторного произведения),

угол между прямыми в пространстве.

24. Общее уравнение линии второго порядка на плоскости. Понятие канонического уравнения и канонической системы координат. План приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду. Типы канонических уравнений и соответствующие им линии.

25. Эллипс, его свойства и эквивалентные определения.

Ограниченность.

Симметрии: центральная и осевая.

Фокальное свойство (определение).

Аналитическое задание (определение).

Директориальное свойство (определение).

Оптическое свойство.

26. Гипербола, ее свойства и эквивалентные определения, каноническое уравнение.

Неограниченность. Асиимптоты.

Симметрии: центральная и осевая.

Фокальное свойство (определение).

Аналитическое задание (определение).

Директориальное свойство (определение).

Оптическое свойство.

27. Парабола, ее свойства и эквивалентные определения, каноническое уравнение.

Неограниченность.

Симметрии: осевая.

Аналитическое задание (определение).

Директориальное свойство (определение).

Оптическое свойство.

28. Общее уравнение поверхности второго порядка в пространстве. Понятие канонического уравнения и канонической системы координат. Типы канонических уравнений и соответствующие им поверхности. Метод сечений.

29. Понятие о цилиндрических, конических, распадающиеся поверхностях и поверхностях вращения. Прямолинейные образующие.

30. Аффинные преобразования: различные определения и их эквивалентность (координатное, инвариантное, аналитическое). Свойства аффинных преобразований.

31. Аналитические формулы аффинных преобразований.

32. Подобия и гомотетии как частный случай аффинных преобразований.

33. Движения: различные определения и их эквивалентность (координатное, инвариантное, аналитическое). Свойства движений.

34. Аналитические формулы движений. Движения 1-го и 2-го рода.

35. Движения как частный случай аффинных преобразований. Параллельные переносы и повороты как частный случай движений.

Практические вопросы

1. Точка *M* является точкой пересечения диагоналей параллелограмма *ABCD*. Рассмотрим все векторы, соединяющие точки *A, B, C, D, M*.

а) Выписать векторы, коллинеарные вектору $\overrightarrow{MA}$.

б) Выписать три вектора неколлинеарных вектору $\overrightarrow{MA}$.

в) Найти координаты вектора $\overrightarrow{MA}$ в базисе $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$. Проверить выполнение формул преобразования координат векторов.

г) Как связаны координаты коллинеарных векторов в одном и том же базисе?

д) Найти координаты векторов $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CB}$, $3\overrightarrow{MA}$ в базисе $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$. Сформулируйте свойства координат векторов.

2. Дан параллелепипед *ABCDA'B'C'D'*. Рассмотрим все векторы, соединяющие его вершины.

а) Выписать все векторы, коллинеарные вектору $\overrightarrow{CC'}$.

б) Выписать три вектора, неколлинеарные вектору $\overrightarrow{CC'}$.

в) Выписать любые две тройки компланарных, но не коллинеарных векторов.

г) Выписать любую тройку некомпланарных векторов.

д) Пусть на стороне *DD'* параллелепипеда лежит точка *M,* $\overrightarrow{DM}=5\overrightarrow{MD'}$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AM}$ в базисе $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{C'C}$, $\overrightarrow{C'B}$, $\overrightarrow{C'D}$.

Проверить выполнение формул преобразования координат векторов.

3. Даны три вектора *a, b, c,* где */a/=3, /b/=1, a* и *c* перпендикулярны, угол между, *b* и *c* равен *60˚, /c/=1.* Найдите значение выражения $/a+c/^2 +(a - b, 2c)$. Какими свойствами скалярного произведения Вы воспользовались?

4. Даны два вектора *a =3 i +4 j, b =- j + k,* где *i, j, k* - ортонормированный базис трехмерного векторного пространства. Найдите скалярное произведение векторов *10 a* и *b,* угол между *10 a* и *b,* и длину *10 a.* Где использованы данные, что *i, j, k* ортонормированный базис?

5. Дан параллелепипед *ABCDA'B'C'D'*. Точка *M* лежит на отрезке *A'C'*, причем *A'M = 11 MC'*.

а) Найдите координаты точки *M(x,y,z)* в аффинной системе координат *A, AD, AB,* *AA'*.

б) Найдите значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$. Верно ли, что $/AM/^2 = x^2 + y^2 + z^2$?

6. Дан тетраэдр *OABC*. Точка *M* лежит на отрезке *OA*, причем $OM = 5\,MA$. Рассмотрим две аффинные системы координат *O, OA, OB,OC* и *M, MA, MB, MC*. Пусть *X* - любая точка трехмерного пространства, (x, y, z) и (x', y', z') - ее координаты относительно первой и второй систем координат соответственно. Запишите формулы преобразования координат точки *X*. В случае, когда точка *X* является серединой отрезка *AB*, найдите ее координаты относительно первой и второй систем координат, подставьте в формулы преобразования координат и проверьте, получатся ли тождества.

7. Дан тетраэдр *OABC*. Точка *M* лежит на отрезке *OA*, причем $OM = 15\,MA$. Выясните, одинаково или противоположно ориентированы тройки векторов *OA, OB, OC* и *MA, MB, MC*. Приведите свой пример двух троек векторов, ориентированных противоположно.

8. Найдите площадь *ABC*, если относительно некоторой прямоугольной системы координат его вершины имеют координаты *A*(5; 2; 0), *B*(0;3;4), *C*(-1; 0;1). Найдите длину высоты *AH* треугольника *ABC*.

9. Найдите объем тетраэдра *OABC*, если его вершины имеют координаты *O*(5; 5; 5), *A*(2; 0; 0), *B*(0;3;0), *C*(0;0;4)

а)относительно некоторой прямоугольной системы координат $O\boldsymbol{ijk}$,

б)относительно аффинной системы координат $Oe_1e_2e_3$ где $\boldsymbol{e_1}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e_2}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e_3}=\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i}$.

10. Пусть относительно некоторой аффинной системы координат на плоскости заданы точки $M_1(0;2)$ и $M_2(3;0)$.

а) Запишите уравнение (уравнения) прямой *m*, проходящей через две точки M_1 и M_2.

б) Выпишите координаты какого-нибудь направляющего вектора *m* прямой *m*.

в) Запишите каноническое уравнение (канонические уравнения) прямой *m*. Сравните с тем, что вы получили в п. а).

г) Запишите параметрические уравнения прямой *m*.

д) Запишите общее уравнение прямой *m*. Как определить координаты направляющего вектора прямой m по ее общему уравнению? Сравните с тем, что Вы получили в п.б).

11. Даны две прямые на плоскости a: $x = 1 + 3t, y = 2 + 2t$ и b: $x = 11\,t,\ y = 1 - 2\,t$, где t – произвольное действительное число.

а) Выясните, по одну или по разные стороны от прямой b располагаются точки $O(0,0)$ и $M(1,5)$.

Пусть система координат прямоугольная.

б) Найти угол между прямыми a и b.

в) Найти расстояние от начала координат до прямой b.

г) Найти какой-нибудь вектор n, перпендикулярный прямой b и написать уравнение прямой c, проходящей через начало координат и перпендикулярной прямой b.

д) Найти расстояние между прямой b и прямой с: $x = 1 + 33\,t, y = -6\,t$.

12. Пусть в трехмерном пространстве относительно некоторой аффинной системы координат заданы точки $M_1(1; 0; 5)$, $M_2(0; 2; 5)$, $M_3(0; 0; 3)$.

а) Запишите параметрическое уравнение плоскости π, проходящей через точки M_1, M_2, M_3.

б) Найдите любую пару векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, параллельных плоскости π.

в) Запишите уравнение плоскости π, заданной точкой M_1 и направляющим подпространством $L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Сравните результаты п. а) и п. в).

г) Запишите параметрические уравнения плоскости π.

д) Запишите общее уравнение плоскости π.

13. Даны две плоскости: $x + y + 5\,z + 1 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$ относительно прямоугольной системы координат.

а) Определить их взаимное расположение.

Пусть система координат прямоугольная.

б) Найдите угол между плоскостями.

в) Найти расстояние от начала координат до до первой плоскости.

г) Найти расстояние между первой плоскостью и плоскостью $2\,x + 2\,y + 10\,z + 5 = 0$.

14. Пусть относительно некоторой аффинной системы координат в трехмерном пространстве заданы точки $M_1(0; 5; 1)$ и $M_2(5; 0; 1)$.

а) Запишите уравнение (уравнения) прямой m, проходящей через две точки M_1 и M_2.

б) Выпишите координаты какого-нибудь направляющего вектора прямой m.

в) Запишите каноническое уравнение (канонические уравнения) прямой m. Сравните с тем, что вы получили в п.а).

г) Запишите параметрические уравнения прямой m.

д) Задайте прямую m в виде пересечения каких-нибудь двух плоскостей.

е) Пусть некоторая прямая l задана как пересечение двух плоскостей: $5x + y + z + 5 = 0$ и $x - y + z = 0$. Задайте l параметрически.

15. Даны две прямые в трехмерном пространстве:прямая a: $x = 1 + 3t$, $y = 2 + 2t$, $z = 3 + t$ и прямая b: $x = 15t$, $y = 1 - 10t$, $z = 1 + t$.

а) Определить их взаимное расположение.

б) Найдите угол между прямыми.

в) Найти расстояние между прямыми.

16. Даны прямая $x = 15t$, $y = 1 - 10t$, $z = 1 + t$. и плоскость $x + y + z + 1 = 0$.

а) Определить их взаимное расположение.

б) Найдите угол между прямой и плоскостью.

17. Даны две плоскости: $x + y + 5z + 1 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$ относительно прямоугольной системы координат.

а) Определить их взаимное расположение.

б) Найдите угол между плоскостями.

в) Найти расстояние от начала координат до до первой плоскости.

г) Найти расстояние между первой плоскостью и плоскостью $2x + 2y + 10z + 5 = 0$.

18. На плоскости относительно прямоугольной системы координат $O\boldsymbol{ijk}$ заданы уравнения кривых второго порядка. Найти каноническую систему координат, изобразить ее относительно исходной системы координат, записать каноническое уравнение кривой, определить ее вид, изобразить кривую в построенной канонической системе координат.

Уравнения кривых следующие:

а) $3x^2 - 3y^2 - 2xy - 2x - 23y = 0$,

б) $9x^2 + 6y^2 + 4xy + 2x - 4y - 4 = 0$,

в) $x^2 + xy + y^2 + x + y = 0$,

г) $9x^2 + 16y^2 - 24xy - 30x - 40y - 25 = 0$.

19. Пусть при аффинном преобразовании плоскости аффинная система координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ переходит в аффинную систему координат $O'\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2$, причем относительно первой системы координат $O'(5;5)$, $\boldsymbol{e}'_1 = \{1; 1\}$, $\boldsymbol{e}'_2 = \{0; 1\}$.

а) Запишите формулы аффинного преобразования. Пусть относительно старой системы координат точка M имеет координаты $M(2;3)$.

б) Найдите координаты образа M' точки M относительно старой системы координат и относительно новой системы координат.

в) Пусть старая система координат является прямоугольной. Является ли данное аффинное преобразование движением и почему?

20. На плоскости относительно прямоугольной системы координат даны два эллипса $x^2/4 + y^2/25 = 1$ и $x^2 + y^2 = 1$.

а) Записать формулы аффинного преобразования, переводящего первый эллипс во второй.

б) Можно ли перевести первый или второй эллипс аффинным преобразованием в гиперболу $x^2 - y^2 = 1$ и почему?

в) Можно ли выполнить задания п. а) и п. б) движением и почему?

21. В трехмерном пространстве относительно прямоугольной системы координат даны два эллипсоида $x^2/4 + y^2/25 + z^2/9 = 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

а) Записать формулы аффинного преобразования, переводящего первый эллипсоид во второй.

б) Можно ли перевести первый или второй эллипсоид аффинным преобразованием в гиперболоид $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ и почему?

в) Можно ли выполнить задания п. а) и п. б) движением и почему?