Разработано по заказу Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки.
Утверждено ФУМО по УГСН 01.00.00 «Математика и механика».

Демонстрационный вариант оценочного средства по дисциплине «Теория функций комплексного переменного»

Инструкция для студентов

Общее время выполнения заданий ***60*** *минут.*

Оценочное средство включает 3 задания. Тип заданий – со свободно конструируемым ответом (СКО). Задание данного типа предполагает составление развернутых ответов, произвольных по содержанию и форме представления и включающих полное решение задачи (описание проблемы) с пояснениями.

1. Комплексные числа и действия над ними.
2. Аналитические функции, элементарные функции.
3. Вычислить интеграл $J = \oint_{|z-1|=1} \frac{dz}{1+z^4}$.

Эталон ответов на Демонстрационный вариант оценочного средства по дисциплине «Теория функций комплексного переменного»

*При ответе на **вопрос №1** билета студент должен проявить знания по следующим вопросам:*

Определение комплексных чисел. Комплексная плоскость. Изображение комплексных чисел. Операции над комплексными числами. Комплексное сопряжение. Неравенства треугольника (в виде одного двойного). Модуль и аргумент комплексных чисел. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы представления комплексных чисел. Формулы Эйлера. Возведение комплексных чисел в n–ю степень. Формула Муавра. Извлечение корня n–й степени из комплексного числа. Геометрическое изображение корней n–й степени из комплексного числа. Применение теории комплексных чисел к решению задач школьного курса математики: решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами, решение тригонометрических уравнений, формулы для синусов и косинусов кратных углов. Вывод тригонометрических формул школьного курса математики с помощью формул Эйлера.

Рекомендуемая литература (основная): [1], с. 15–22, [2], с. 12–15, [3], с. 9–14, [4], с. 4–13, [5], с. 9–15.

*При ответе на **вопрос №2** билета студент должен проявить знания по следующим вопросам:*

Аналитические функции

Понятие аналитической функции комплексного переменного. Дифференцируемость и производная функции комплексного переменного. Условия Коши — Римана. Дифференцирование степенных рядов. Понятие аналитической функции. Гармонические функции. Оператор Лапласа. Сопряженные гармонические функции. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформное отображение. Области однолистности аналитической функции. Отображения, осуществляемые элементарными функциями.

Рекомендуемая литература (основная): [1], с. 69–74, 96–102, [2], с. 30–42.

Элементарные функции

Линейная функции. Показательная функция (экспонента). Тригонометрические, гиперболические и обратные к ним функции. Степенная функция, радикал и логарифмическая функции.

Рекомендуемая литература (основная): [1], с. 107–113, 143–173, [2], с. 138–144, 169–171.

Вопрос №3

Решение: Сначала найдем особые точки подинтегральной функции, лежащие внутри контура интегрирования. Для этого решим уравнение $z^4+1=0$. Имеем $z_k = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{i\pi}} = \exp\left(i\frac{\pi+2\pi k}{4}\right), k = 0,1,2,3$. Мы получили четыре точки – простые полюсы, из которых только две лежат внутри контура интегрирования. Выпишем эти точки $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$. Следовательно, искомый интеграл равен сумме двух вычетов подинтегральной функции в точках z_0 и z_4:

$$J = 2\pi i\left(Res_{z_0}\frac{1}{z^4+1} + Res_{z_4}\frac{1}{z^4+1}\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{4z_0^3} + \frac{1}{4z_4^3}\right) =$$

$$\frac{2\pi i}{4}\left(\frac{z_0}{z_0^4} + \frac{z_4}{z_4^4}\right) = \frac{\pi i}{2}(z_0 + z_4) = \frac{\pi i}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i+1-i) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}i.$$